FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Prérequis pour l'entrée en classes préparatoires à CPE Lyon

Les formules suivantes doivent être travaillées intelligemment. Certaines doivent être apprises par coeur (utilisez des moyens mnémotechniques personnels), d'autres doivent pouvoir être retrouvées en très peu de temps. De plus, par souci de concision, certaines hypothèses ne sont pas précisées. Par exemple, dans la formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, *a et b désignent des réels strictement positifs.*

ALGÈBRE

Équation du second degré

Soient a, b et c des réels (où $a \neq 0$) et l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

On nomme discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$: l'équation (E) possède deux solutions réelles

  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$: l'équation (E) possède une solution réelle double

  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Suites

Suites arithmétiques

$u_{n+1} = u_n + r$ $\quad u_n = u_0 + n\,r$

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

$u_{n+1} = q\,u_n$ $\quad u_n = u_0\,q^n$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ n+1 & si\ q = 1 \end{cases}$$

Identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Prérequis pour l'entrée en classes préparatoires à CPE Lyon

ANALYSE

Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$ $\qquad e^0 = 1$ $\qquad e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$

$\ln e = 1$ $\qquad e^1 = e$ $\qquad \ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\qquad e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\qquad \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ $\qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\ln(a^n) = n \ln a \quad (n \in \mathbb{Z})$ $\qquad \left(e^a\right)^b = e^{ab}$

Limites de référence de fonctions et de suites

Fonctions

Limites à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Limites à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Croissances comparées à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Limites d'un taux d'accroissement

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Suites

Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Prérequis pour l'entrée en classes préparatoires à CPE Lyon

ANALYSE

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle(s) de dérivabilité
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\ ,\ ]0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}_-^*$	$x \mapsto n x^{n-1}$	$]-\infty ; 0[\ ,\ ]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées et composées

$(ku)' = k\,u'$ $\qquad (u+v)' = u' + v'$ $\qquad (uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$ $\qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad \left(e^u\right)' = u'e^u$

$\left(u^n\right)' = n\,u^{n-1}u',\ n \in \mathbb{N}^*$

u étant à valeurs strictement positives : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $\qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Primitives des fonctions usuelles (où c est une constante réelle)

Fonction f	Primitives F	Intervalle(s) de validité
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$]-\infty ; 0[\ ,\ ]0 ; +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + c$	$]-\infty ; 0[\ ,\ ]0 ; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Prérequis pour l'entrée en classes préparatoires à CPE Lyon

TRIGONOMÉTRIE

Résultats élémentaires

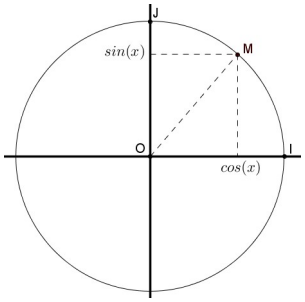
$-1 \le \cos x \le 1, \quad -1 \le \sin x \le 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

conséquence du théorème de Pythagore

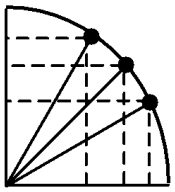
$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$

les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0



Angles associés

on retrouve ces formules par lecture sur le cercle trigonométrique

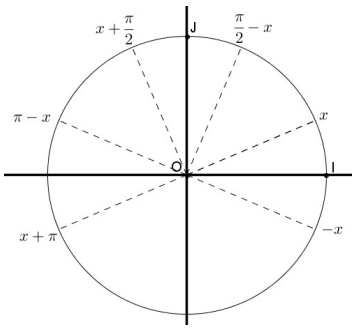
$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$



Formules d'addition

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Formules de duplication

cas particuliers des formules d'addition

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Formules de linéarisation

se déduisent des formules de duplication

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$