Classes préparatoires associées à CPE Lyon
Révisions de Mathématiques

Exercices de révision du programme de Terminale

Bonjour,

Afin de favoriser votre intégration, il est fortement conseillé de vous préparer avant la rentrée. Nous vous proposons de revoir certains points du programme de Mathématiques de Terminale qui sont essentiels pour les classes préparatoires associées à CPE, afin, notamment, d'acquérir de la rapidité et de maîtriser les techniques de calculs (à réaliser sans calculatrice puisqu'elles seront interdites pour les devoirs dans cette matière). Cela facilitera également le changement de rythme auquel vous allez être très vite confrontés.

Ce document comporte deux parties. La première partie contient les énoncés des exercices qui vous permettront de cibler les fondamentaux du lycée. La seconde comporte des indications pour la résolution des exercices.

Ils portent sur les points suivants :

- ✓ équations - inéquations ;
- ✓ calcul algébrique ;
- ✓ fonctions d'une variable réelle ;
- ✓ suites numériques - raisonnement par récurrence ;
- ✓ calcul intégral - calcul de primitives.

Pour travailler correctement ces exercices, il est indispensable de chercher à les résoudre sans s'aider de la deuxième partie et d'aller réviser les chapitres de votre cours de Terminale correspondants. Au besoin, si vous restez bloqué longtemps, quelques indications sont données en fin du document. Il est recommandé de tenter plusieurs fois de les résoudre avant d'abandonner la recherche. Pour cela, nous conseillons de laisser passer au minimum une journée entre les deux. Le temps de recherche et d'apprentissage du cours est aussi important, si ce n'est plus, que la compréhension en elle-même du corrigé.

Ce travail sera évalué par un test spécifique dès la rentrée, qui nous permettra de savoir (et à vous également) où vous en êtes et quels sont les points qui ne sont pas acquis et que vous devrez retravailler.
Il portera principalement sur les points suivants :

- ✓ équations du second degré ;
- ✓ identités remarquables ;
- ✓ suites ;
- ✓ fonctions logarithme et exponentielle ;
- ✓ limites de référence de fonctions et de suites ;
- ✓ dérivées des fonctions usuelles ;
- ✓ opérations sur les dérivées et les composées ;
- ✓ primitives des fonctions usuelles.

Bon courage à tous !

Partie I : Enoncés des Exercices

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(2x+1)(x+2) \leqslant 0$;
2. $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 0$;
3. $\dfrac{x-2}{x+3} \geqslant \dfrac{x}{x-1}$.

Exercice 1.2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ (utiliser des combinaisons linéaires d'équations) :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lrl} (E_1) & 2x + \ y & = 3 \\ (E_2) & x \ - 3y & = 8 \end{array}\right. .$$

2 Calcul algébrique

Exercice 2.1

Donner le domaine de définition, inclus dans $\mathbb{R}$, de l'expression suivante et la simplifier : $\dfrac{1+\frac{x+1}{x+3}}{x+4}$.

Exercice 2.2

Soient a, b, et c des réels. Simplifier : $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$.

Exercice 2.3

Soient x, y et z des réels strictement positifs. Simplifier l'expression : $\dfrac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+z\frac{x+y}{1+xy}}$.

3 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 3.1

Soient x, a, b des réels strictement positifs, c, d des réels positifs, u, v des réels et p, q des entiers relatifs. Cocher la réponse correcte.

1. On a $\ln(a+b) =$

   ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(ab)$ ☐ rien de tout cela.

2. On a $\ln(ab) =$

   ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(a+b)$ ☐ rien de tout cela.

3. On a $\mathrm{e}^{u+v} =$

   ☐ $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^v$ ☐ $\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^v$ ☐ e^{uv} ☐ rien de tout cela.

4. On a $\mathrm{e}^{uv} =$

   ☐ $\mathrm{e}^u\mathrm{e}^v$ ☐ e^{u+v} ☐ $\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^v$ ☐ rien de tout cela.

5. On a $\sqrt{c+d} =$

   ☐ $\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ☐ $\sqrt{c}\sqrt{d}$ ☐ $(\sqrt{c})^{\sqrt{d}}$ ☐ rien de tout cela.

6. On a $\sqrt{c}\sqrt{d} =$

   ☐ $\sqrt{cd}$ ☐ $(\sqrt{c})^{\sqrt{d}}$ ☐ $\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ☐ rien de tout cela.

7. On a $(x^p)^q =$

   ☐ x^{p^q} ☐ x^{pq} ☐ x^px^q ☐ rien de tout cela.

Exercice 3.2

Compléter :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x} =$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} =$

Exercice 3.3

Faire l'étude et tracer l'allure des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x(x^2-3x+4)$;
2. $g : x \mapsto \sqrt{9x^2-6x+1}$.

Exercice 3.4

Dans chaque cas suivant, donner le domaine de définition de la fonction puis calculer sa dérivée en précisant sur quel ensemble la fonction est dérivable :

1. $f : x \mapsto \ln(2x+1)$;
2. $g : x \mapsto \dfrac{\cos^2(x)}{x^3}$;
3. $h : x \mapsto \sin(\pi - 2x)$.

4 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 4.1

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3} + 1$.
C'est une suite **arithmético géométrique**.

1. Déterminer la solution réelle a de l'équation, $x = \dfrac{x}{3} + 1$.
2. Posons alors, pour n entier naturel, $u_n = v_n - a$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de l'entier naturel n.
4. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Remarque. Dans les exercices suivants (et de manière générale), pour n un entier naturel non nul, on utilise la notation « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ » qui représente la somme pour l'indice k entier variant de 1 à n des $f(k)$, ainsi on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{5} \sin(k+n) = \sin(2+n) + \sin(3+n) + \sin(4+n) + \sin(5+n).$$

Exercice 4.2

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4.3

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour n un entier naturel non nul, $u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ est égale à : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire une simplification de u_n pour n un entier naturel non nul.
3. Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 4.4

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3$.
On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 6$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$;
3. $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$;
4. $\displaystyle\int_0^1 e^{3u}du$;
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{3x+1}dx$.

Exercice 5.2

Donner le domaine de définition et déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$;
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{(3x+1)^2}$.

Partie II : Indications

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

1. Faire un tableau de signe si besoin.
2. Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit (en enlevant les annulations du dénominateur).
3. Regrouper en mettant au même dénominateur.

Exercice 1.2

$3(E_1) + (E_2)$ donne x.

2 Calcul algébrique

Ces exercices utilisent des reflexes de calcul que vous devez avoir déjà acquis : développer, factoriser, mettre sur le même dénominateur...

3 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 3.1

Voir l'étude des fonctions usuelles correspondantes.

Exercice 3.2

1. C'est une limite usuelle.
2. Ce n'est pas une forme indéterminée.
3. C'est une limite usuelle.

Exercice 3.3

1. Il est plus facile de développer le produit avant de calculer la dérivée !
2. Ne pas oublier de donner le résultat sous la forme la plus factorisée possible.

Exercice 3.4

Voir l'étude des fonctions usuelles correspondantes.

4 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 4.1

3. Commencer par donner u_n en fonction de l'entier naturel n.

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Chercher à reconnaître des formes dérivées comme « $\dfrac{u'}{u}$, $u' \times u^n$, ... » pour pouvoir intégrer directement. Il est important de s'entraîner à « voir » cela.